宿題解答

標本空間をΩとし，空事象をφとする．また事象Aの余事象を$A_c$とする．
確率の公理を
(a) 任意の事象Aにおいて, $0 \leqq P(A) \leqq 1$
(b) $P(\Omega)=1$
(c) $A \cap B=\phi$のとき，$P(A \cup B) = P(A)+P(B)$
とする．

(1) $P(A_c)=1-P(A)$, 特に, $P(\phi)=0$を証明せよ．
証明： $A \cap A_c = \phi$なので，(c)より，$P(A \cup A_c) = P(A) + P(A_c)$である．また，
$A \cup A_c = \Omega$なので，(b)より，$P(A \cup A_c) = 1$．よって，$P(A) + P(A_c) = 1$なので，
$P(A_c)=1-P(A)$である．
また, $A = \Omega$のとき，$P(\phi) = P(\Omega_c) = 1-P(\Omega) = 0$ である (Q.E.D)

(2) $A \subseteq B$ならば, $P(A) \leqq P(B)$を証明せよ．
証明 : $A \cap (B \cap A_c) = \phi$なので，(c)より，$P(A \cup (B \cap A_c)) = P(A) + P(B \cap A_c)$である．
$A \subseteq B$ より，$A \cup (B \cap A_c) = B$ なので，$P(B) = P(A) + P(B \cap A_c)$である．よって，(a)より，$0 \leqq P(B \cap A_c) \leqq 1$ なので，$P(A) \leqq P(B)$ (Q.E.D)

(3) 情報源$S = \{A_1(1/3), A_2(1/3), A_3(1/12), A_4(1/12), A_5(1/12), A_6(1/12)\}$とする．このとき，Sのエントロピーを求めよ

$$
\begin{aligned}
H(S) &= -\{ 1/3 \times \log2(1/3) + 1/3 \times \log2(1/3) +1/12 \times \log2(1/12) + 1/12 \times \\
&\quad \log2(1/12) + 1/12 \times \log2(1/12) + 1/12 \times \log2(1/12) \} \\
&\fallingdotseq 2/3 \times 1.585 + 4/12 \times 3.585 \\
&\fallingdotseq 2.25
\end{aligned}
$$