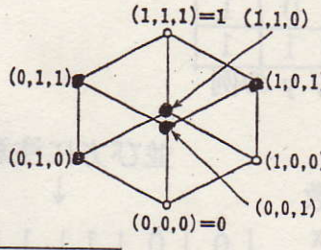
論　理　関　数

1．論理関数の定義

（n変数）　$f : B^n \to B$、$B = \{0, 1\}$

例：$f = x_2 \cdot \sim x_3 \vee \sim x_1 \cdot x_3$
$\qquad \vee \sim x_2 \cdot x_3$

・論理式は、ある論理関数を表現している。
・逆に、論理関数は、必ず論理式で表現できる。
　ただし、一意的には定まらない。
・２変数の論理関数の数は、１６個ある。



$\{0,1\}^3$ のハッセ図

2．加法形式と乗法形式

論理式は、必ず、加法形式、および乗法形式に展開できる。ただし、xi又は$\sim x_i$を文字と言い、幾つかの文字の論理積を積項、論理和を和項という時、
加法形式とは、

$$f = \alpha 1 \vee \alpha 2 \vee \text{------} \vee \alpha m \quad (\alpha i \text{は積項})$$

乗法形式とは、

$$g = \beta 1 \cdot \beta 2 \cdot \text{------} \cdot \beta m \quad (\beta m \text{は和項})$$

例：$f = x_2 \cdot \sim x_3 \vee \sim x_1 \cdot x_3$
$\qquad \vee \sim x_2 \cdot x_3$

$\quad g = (x_2 \vee \sim x_3) \cdot (\sim x_1 \vee x_3)$
$\qquad \cdot (\sim x_2 \vee x_3)$

ただし、これらは一意的に定まらない。

真理値表

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3．論理関数の標準形

最小項　$\sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \Leftrightarrow (0\ 1\ 1)$

最大項　$\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3 \Leftrightarrow (1\ 0\ 0)$

$f = \sim x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3 \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3$
$\quad \vee \sim x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \sim x_2 \cdot x_3$
$\quad \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \sim x_3$ ---（主）加法標準形

$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3)$
$\quad \cdot (\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)$ ---（主）乗法標準形

最小項および最大項が表現する論理関数

x_1	x_2	x_3	$\sim x_1 x_2 x_3$	$\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

定理：すべての論理関数は（主）加法標準形
（（主）乗法標準形）を用いて一意的に表現できる。

4．論理関数の完全形

$\{\vee, \cdot, \sim\}$、$\{\vee, \sim\}$、$\{\cdot, \sim\}$、
$\{\,|\,\}$、$\{\,\|\,\}$

$x \mid y = \sim (x \cdot y)$ --NAND
$x \parallel y = \sim (x \vee y)$ --NOR

2変数の論理関数

X_1	X_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1