論　理

情報科学概論　向殿政男

命題

Truth（雪は白い）∈｛T、F｝

ここで、”雪は白い”を命題と言い、Truth は命題の真理値を表す。

ただし、T：真、F：偽。以後、Tを１で、Fを０で表すことにする。

すなわち、a∈｛0,1｝とする時、

Truth(命題)＝a ：命題の真理値、　ただし、１：真、０：偽。

合成命題と論理演算

A、B を命題とし、Truth(A)＝a、Truth(B)＝b とする。

Truth(A または B)＝Truth(A)∨Truth(B)＝a∨b

Truth(A かつ B)＝Truth(A)・Truth(B)＝a・b

Truth(A でない)＝～Truth(A)＝～a

ここで、

論理和： a∨b＝max(a,b)

論理積： a・b＝min(a,b)

否定： ～a＝1-a

　ただし、a,b∈｛0,1｝

		a	
		0	1
b	0	0	1
	1	1	1

a ∨ b

		a	
		0	1
b	0	0	0
	1	0	1

a ・ b

a	0	1
	1	0

～a

述語

A(x)： U→｛0,1｝、Uは全体集合。

例：A(x)＝x さんは男である

x に具体的なUの要素が代入されると、述語は命題になる。

e∈U →A(e) ∈｛0,1｝

述語 A(x)と部分集合 A とは対応している。

A(e1)＝0 ⟷ e1 not∈ A

A(e2)＝1 ⟷ e2 ∈A

このように、全体集合Uのある要素 e を固定すると、

部分集合 A と、命題 A(e)とは同じことを表している。

真理値表

f=Truth(A かつ B または B でなく かつ C または A でなく かつ B で かつ C でない)

=(a・b)∨(～b・c)∨(～a・b・～c)

=a・b∨～b・c∨～a・b・～c

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

論理式fが常に真のとき、fをトートロジー（恒真式）という。

ならば（→）の真理値表

		a	
		0	1
b	0	1	0
	1	1	1

含意（Implication）

a→b = ～a ∨ b

２値論理で成立する恒等式

a,b,c を真理値とする。この時、以下の等式が成立する。

(1) ベキ等律： a∨a=a、a・a=a

(2) 交換律： a∨b=b∨a

(3) 結合律： a∨(b∨c)=(a∨b)∨c、a・(b・c)=(a・b)・c

(4) 吸収律： a∨(a・b)=a、a・(a∨b)=a

(5) 分配律： a・(b∨c)=(a・b)∨(a・c)、a∨(b・c)=(a∨b)・(a∨c)

(6) 二重否定： ～(～a)=a

(7) 相補律： a∨～a=1、a・～a=0

(8) 単位元： a∨0=a、a・1=a

(9) ゼロ元： a∨1=1、a・0=0

(10) ド・モルガン律： ～(a∨b)=～a・～b、～(a・b)=～a∨～b

集　　合

1．集合

集合と要素（元とも言う）、$a \in A$、$b \in A$

部分集合の定義

べき集合：　$2^U = P(U)$

Uの部分集合全体からなる集合

従って、ϕ（空集合）$\in P(U)$、

U（全体集合）$\in P(U)$

集合の定義の仕方

$A = \{2、4、6\}$：列挙型、

$B = \{x \mid 2 \leqq x \leqq 6\}$：条件型

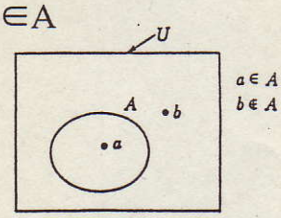


図 1.1　ベン図

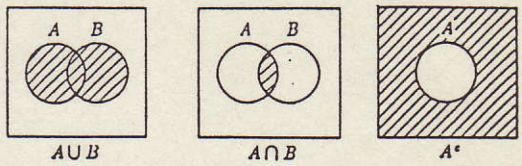


図 1.2　和集合，積集合，補集合を表すベン図

2．特性関数と集合演算

集合演算の定義

∪（和集合）、∩（積集合）、^{c}（補集合）

$\chi_A : U \to \{0,1\}$,　$\chi_A(a)=1$　$a \in A$

$\chi_A(b)=0$　$a \notin A$

$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$,

$\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$,

$\chi_{A^c}(x) = \sim\chi_A(x)$

3．集合で成立する恒等式

A、B、Cを全体集合Uの部分集合とする。この時、以下の等式が成立する。

（1）べき等律　$A\cup A=A$、$A\cap A=A$

（2）交換律　$A\cup B=B\cup A$、$A\cap B=B\cap A$

（3）結合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

（4）吸収律　$A\cup(A\cap B)=A$、

$A\cap(A\cup B)=A$

（5）分配律

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（6）二重否定　$(A^c)^c=A$

（7）相補律　$A\cup A^c=U$、$A\cap A^c=\phi$

（8）単位元　$A\cup\phi=A$、$A\cap U=A$

（9）ゼロ元　$A\cup U=U$、$A\cap\phi=\phi$

（１０）ド∩モルガン律

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$、

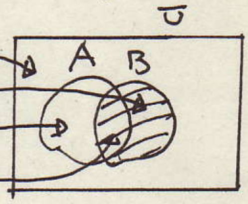
$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

（注）論理と集合とは数学的には同じ体系である（２値論理で成立する等式において、∨を∪で、・を∩で、～を ^{c} で置き換え、０をϕで、１をUで置き換えればよい）。これをブール（Boole）代数という。

4．論理と集合との関係

集合A----述語{x: x はA である}

A	B	
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



問題：

1．（1）$U=\{1、2、3\}$とした時、P(U)を示せ

（2）$U=\{x \mid x$はサイコロの目の数$\}$

$A=\{x \mid x$は整数、$1\leqq x\leqq 4\}$

$B=\{x \mid x$は偶数、$2\leqq x\leqq 6\}$とする時、

$A\cup B$、$A\cap B$、$A^c\cap B$、$A^c\cap B^c$を求めよ

（3）$(A\cap B^c)\cup(A\cap B)=A$を等式（1）－－（１０）を用いて示せ

（4）$(A\cap B^c)^c=(A^c\cap B^c)\cup B$を等式（1）－－（１０）を用いて示せ

2．（1）図１で、斜線の集合を式で示せ

（2）$Y=(A\cap B^c)\cup C$とするとき、集合Yを図２に斜線で図示せよ。

（3）図２で本質的に異なる集合を表わす式は、何個存在するか

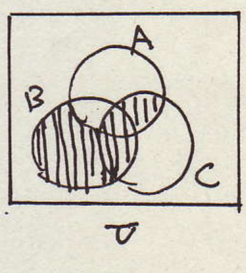


図１

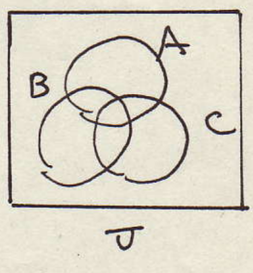


図２