1. 98 と 44 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求めよ.

ユークリッドの互除法
入力: 正整数 a, b
出力: a と b の最大公約数 d
1. a / b = q ---- r (余り)
2. if r = 0 then d ← b end
3. a ← b, b ← r として 1. へ戻る

答) ユークリッドの互除法を繰り返し適用すると,
98 / 44 = 2 ---- 10
44 / 10 = 4 ---- 4
10 / 4 = 2 ---- 2
4 / 2 = 2 ---- 0 終了
よって最大公約数は 2

2. a と b をそれぞれ 2 桁の整数とするとき,ユークリッドの互除法でステップ数が最も多いと思われる a と b の組合せを 1 つ求めよ.

答) a = 2, b = 1 から初めて逆算する.ある反復における(a, b)は次の反復において(b, a%b)になるので,a, b から逆算すると,ある整数 q を用いて,(a*q+r, a)となる.ここで,できるだけステップ数を大きくするためには q = 1 を選べばよいので,
2 / 1 = 2 --- 0
3 / 2 = 1 ---- 1
5 / 3 = 1 ---- 2
8 / 5 = 1 ---- 3
13 / 8 = 1 ---- 5
21 / 13 = 1 ---- 8
34 / 21 = 1 ----13
55 / 34 = 1 ---- 21
89 / 55 = 1 ---- 34

よって(89, 55) がステップ数最大である. 2 桁の整数においては,この答えが正しい.

この結果は何故正しいと言えるのか．ここで，1, 2, 3, 5, 13, 21, 34, 55, 89, ...は（２項目からの）フィボナッチ数列である．(2, 1)から初めてこの方法で得られる a, b 対は F_k ($F_1 = 1, F_2 = 2$)を k 番目のフィボナッチ数とすると, (F_k, F_{k-1})である．
2. の問題を一般化すると次のようになる．

3. a と b をそれぞれ N 未満の整数とするとき，ユークリッドの互除法でステップ数が最も多いと思われる a と b の組合せを 1 つ求めよ．

この問題の答について以下の事実が知られている．
事実：ユークリッドの互除法が k ステップ必要とする最小の a, b($a > b > 0$)は $a=F_k$, $b=F_{k-1}$ である．
(証明は, http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm や Knuth の The Art of Computer Programming の２巻目にのっている)

この事実より 3. の答は N 未満の最大のフィボナッチ数を F_k としたとき，(F_k, F_{k-1})が答となる．